استخدام طرائق النمذجة الرياضية لحل مشاكل غير خطية

سعد محسن سلمان

قسم الرياضيات ، كلية العلوم ، جامعة النهرين.

الخلاصة

في هذا البحث تم دراسة اسلوب نمذجة رياضية لحل مشاكل غير خطية والتي تم ايجاد الحلول لها باستخدام معادلات لاكرانج. وقد تم توضيح المسألة باستخدام مسألة أفتراضية.

المقدمة

لقد تطورت الاساليب والطرق المستخدمة في تطبيقات بحوث العمليات منذ ظهورها ولحد الآن وكما ازدادت المجالات والميادين التي تطبق فيها تلك الاساليب والطرق. ويعتبر المجال العسكري من المجالات الرائدة التي طبقت تلك الاساليب فيها لزيادة فاعلية الهجوم أو لتعظيم كفاءة الدفاع.

ففي الدول المتقدمة مثل الولايات المتحدة الامريكية، فرنسا، انكلترا، المانيا، ... الخ[١] تمثل هيئات بحوث العميات أحدى المكونات الاساسية لوزارة الحرب، لغرض تقديم الدراسات والبحوث التي تزداد من خلال كفاءة التطبيقات العسكرية في كافة الميادين (الجوية، البرية والبحرية) وهناك دول مثل (كندا، السويد، سويسرا وبلجيكا) تمتلك جيوشاً ركزت أهتمامها على أساليب بحوث العمليات لغرض زيادة الاداء العسكري، سواء ضمن أستراتيجية الدفاع أو الهجوم[٢]، وفي الدول النامية بدأ الاهتمام متأخراً في تطبيقات بحوث العمليات في المجالات العسكرية. ويمكن القول بأن الهند تعتبر من أكثر الدول تطويراً وأستخداماً لاساليب بحوث العمليات في هذا المجال.

فقد أستخدمت هذه الاساليب في أدراة العمليات العسكرية وأختيار الوسائل التعبوية في سياسة الهجوم والدفاع وكذلك في النقل والمواصلات ضمن أراضي شديدة الوعورة مثل جبال الهملايا[٣].

الغاية

ان الغاية هي استخدام بعض طرق النمذجة الرياضية لحل مشاكل غير خطية ومنها تحديد عدد وأنواع الاسلحة لضرب أهداف معينة.

ان مجالات الاستفادة وتطبيق أساليب بحوث العمليات متعددة وكثيرة، وعليه فسوف نتطرق من خلال هذا البحث الى مشكلة كانت ولاتزال من أهم المشاكل التي تتطلب الدراسة والتحليل لغرض زيادة كفاءة الخيارات المعتمدة فيها. أن مشكلة تخصيص السلاح تعتبر من المشاكل المعقدة نظراً لكثرة المتغيرات الداخلة فيها سواء كانت من جانب الجهة المهاجمة أو المدافعة.

أن الواقع العملي هو الذي يحدد بالضبط النموذج المطلوب ومراحل التعامل مع المشكلة على ضوء المعلومات المهمة والمتوفرة والتي يتم جمعها من قبل الجهة المهاجمة أو المدافعة لذلك تكون الامثلة الافتراضية دليل عمل وتوضيح يساعد في تبيان مراحل الحل وكذلك محاكاة الواقع الفعلي عند توفر المعلومات عن مشكلة حقيقية يتم التعامل معها. وعليه فسوف نتابع التسلسل المنطقي في حل تلك المشكلة على ضوء مراحل متعاقبة، يجري فيها تبسيط بعض الفرضيات لغرض الحل، ثم تأشير مراحل التعقيد على ضوء أدخال متغيرات جديدة. لذلك سوف نعرف أولا الفرضيات والصياغة العامة للمشكلة ثم توضيح الحل عن طريق مثال أفتراضي لجهتين متحاربتين وقد تم أستخدام برنامج تم تصميمه لهذا الغرض. وأخيراً مناقشة نتائج الحل والتوصل الى الاستنتاجات والتوصيات بخصوص الموضوع.

الفرضيات والصياغة العامة للمشكلة

من الملاحظ أن مشكلة تخصيص السلاح تكون ذات أبعاد كثيرة ومتشعبة، وعليه سيتم وضع بعض الفرضيات الاساسية التي تساعد في تحديد تلك الابعاد والالمام بها.

مثـال

نفترض وجود جهتين متحاربتين أحداهما تبدأ بالهجوم وتمتلك عدة أنواع من الاسلحة الهجومية مثل (طائرات،

صواريخ، مدافع بعيدة المدى،... الخ) في حين تدافع الجهة الاخرى عن عدة أهداف داخل أراضيها. تحاول الجهة المهاجمة استخدام الاسلحة المتوفرة لديها لتحقيق أكبر ضرر ممكن بأهداف الجهة المدافعة. علماً بأن هذه الاهداف لها قيم مختلفة.

لغرض بناء النموذج الرياضي (Model Building) الملائم باستخدام طريقة التخصيص (Assignment) نستخدم الفرضيات التالية:

p_{ij} = أحتمالية أصابة الهدف(i) بواسطة السلاح من النوع(j) (معلومة).

v_i = قيمة الهدف (معلومة).

X_{ij} = عدد الاسلحة الهجومية من النوع (j) والتي تخصص للهدف(i).

R_j = أحتمالية نجاح عملية الاطلاق للاسلحة (معلومة).

U_{ij} = أحتمالية أختراق الاسلحة للدفاعات (معلومة).

M_j = العدد الكلي للاسلحة الهجومية.

N = العدد الكلي للاهداف.

المطلوب

تحديد نوع وعدد الاسلحة الهجومية التي تطلق صوب الاهداف لتحقيق تعظيم دالة الهدف (Z).

دالة الهدف (Objective Function):

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^{N} v_i \left[1 - \prod_{j=1}^{k} (q'_{ij})^{x_{ij}} \right] \text{ .... (1)}$$

$i = 1, 2, \ldots, N$ ، $j = 1, 2, \ldots, k$.

وفقاً للقيود التالية (Subject to Constraints):

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = M_j \text{ .... (2)}$$

ولكل $i = 1, 2, \ldots, N$ ، $j = 1, 2, \ldots, k$.

$$X_{ij} \geq 0 \text{ (Decision Variables) .... (3)}$$

q_{ij} = أحتمالية عدم أصابة الهدف(i) بواسطة السلاح من النوع(j) مع العلم أنه أنطلق بنجاح وأخترق الدفاعات، ويمكن أشتقاقه حسب المعادلات التالية:

$$P(A) = R_j$$
$$P(B|A) = U_{ij}$$
$$P(C|AB) = q_{ij}$$

فان أحتمال اصابة السلاح(j) للهدف(i) هو :

$$1 - q_{ij} = P(ABC')$$

وباستخدام قاعدة الضرب نحصل على:

$$1 - q_{ij} = P(A)P(B|A) - P(C'|AB)$$

أي أن:

$$1 - q_{ij} = R_j U_{ij}(1 - q'_{ij})$$
$$q_{ij} = 1 - R_j U_{ij}(1 - q'_{ij})$$

حيث أن:

A = أنطلاق السلاح بنجاح.

B = أختراق السلاح دفاعات الهدف(i).

C = عدم أصابة السلاح (j) للهدف(i).

C′ = أصابة السلاح (j) للهدف(i).

q_{ij} = أحتمال عدم أصابة السلاح(i) بواسطة السلاح من النوع(j).

وبالتبسيط ينتج:

$$q'_{ij} = 1 + \frac{q_{ij} - 1}{R_j U_{ij}} \text{ .... (4)}$$

وعند تعويض المعادلة رقم (٤) في المعادلة رقم (١)، ينتج مايلي:

$$\text{MaxZ} = \sum_{i=1}^{N} v_i \left[1 - \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{q_{ij} - 1}{R_j u_{ij}} \right)^{x_{ij}} \right] \text{ .... (5)}$$

بحيث أن:

$$\sum_{i=1}^{N} X_{ij} = M_j \text{, } j = 1, 2, \ldots, k$$
$$X_{ij} \geq 0, \forall \text{ i, j}$$

مثال توضيحي

تمتلك الجهة المهاجمة ثلاثة أنواع من الاسلحة (طائرات، صواريخ، مدافع بعيدة المدى) علماً بأن عدد الاسلحة من كل نوع على التوالي (٥٠، ٨٠، ٤٥) وتوجد للجهة المدافعة حوالي (٢٠) هدف ولغرض التبسيط فقد تم أعتبار ان قيم تلك الاهداف تتصاعد من من (١ الى ٢٠).

يبين الجدول رقم (١)[٤] أحتمالية أصابة كل نوع من الاسلحة لكل هدف من الاهداف، أعتماداً على قيمة الهدف، علماً بأن هذه الاحتماللات مأخوذة من تجارب سابقة بخصوص هذا الموضوع.

جدول رقم (١)

أحتمالية أصابة الاهداف بواسطة كل نوع من الاسلحة.

قيمة الهدف	السلاح (١) طائرات	السلاح (٢) صواريخ	السلاح (٣) مدفعية
1	0.56	0.22	0.03
2	0.45	0.36	0.01
3	0.32	0.39	0.21
4	0.68	0.25	0.32
5	0.83	0.36	0.45
6	0.19	0.34	0.16
7	0.52	0.37	0.22
8	0.55	0.37	0.23
9	0.33	0.30	0.70
10	0.50	0.80	0.21
11	0.32	0.38	0.23
12	0.44	0.45	0.18
13	0.25	0.65	0.28
14	0.90	0.45	0.55
15	0.34	0.30	0.24
16	0.35	0.85	0.45
17	0.88	0.41	0.51
18	0.75	0.38	0.47
19	0.49	0.45	0.40
20	0.36	0.55	0.36

وعلى أفتراض ان أحتمالية النجاح لعملية الاطلاق لكل أنواع الاسلحة هي كما يلي:

السلاح من النوع (١) (R_1) = ٠.٨٥

السلاح من النوع (٢) (R_2) = ٠.٩٠

السلاح من النوع (٣) (R_3) = ٠.٨٣

أما أحتمالية أختراق الاسلحة من الانواع الثلاثة للدفاعات الموجودة حول الاهداف، فهي كما مبينة في الجدول رقم (٢).

جدول رقم (٢)

أحتمالية أختراق الاسلحة للدفاعات حول الاهداف.

الهدف (V_i)	السلاح (١) طائرات (V_{i1})	السلاح (٢) صواريخ (V_{i2})	السلاح (٣) مدفعية (V_{i3})
1	0.72	0.80	0.60
2	0.88	0.72	0.90
3	0.75	0.82	0.74
4	0.83	0.81	0.85
5	0.81	0.95	0.65
6	0.97	0.76	0.69
7	0.88	0.82	0.64
8	0.84	0.76	0.72
9	0.81	0.71	0.71
10	0.87	0.65	0.70
11	0.83	0.75	0.73
12	0.92	0.76	0.85
13	0.60	0.33	0.86
14	0.96	0.81	0.81
15	0.93	0.68	0.80
16	0.68	0.72	0.72
17	0.91	0.91	0.65
18	0.91	0.75	0.60
19	0.69	0.77	0.71
20	0.62	0.75	0.70

حل المثال

تم إيجاد حل للمثال بطريقة لاكرانج (Lagrange Multipliers)[٥] لايجاد المتغيرات (x_{ij}) التي تمثل التخصيص الامثل للاسلحة الهجومية على الاهداف وكذلك ايجاد أعظم تدمير للاهداف.

طريقة لاكرانج Lagrange Multipliers

تستخدم طريقة لاكرانج لاستخراج قيم x والتي تسمى أعلى قيمة للدالة (z)، والنموذج الرياضي هو:

$$\text{Max. } z = f(x_1, x_2)$$

Subject to:

$$g(x_1, x_2) = c$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

حيث أن c ثابت.

وعلى فرض أن $f(x_1, x_2)$ و $g(x_1, x_2)$ دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x_1 و x_2، فان المسألة سوف تؤول الى:

$$\text{Max. } z = f(x_1, x_2)$$

Subject to:

$$g(x_1, x_2) = c$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$L(x_1, x_2, \lambda)=f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$$

حيث أن L تسمى بدالة لاكرانج، و λ يسمى بمضروب لاكرانج.

تم أستخدام الحاسبة الالكترونية لحل مثل هذه المسائل وذلك بعمل برنامج بلغة بيسك. وتم الحصول على النتائج التالية وكما مبين في الجدول رقم (٣).

جدول رقم (٣)

النتائـج المتحققة.

الهدف	السلاح (١) طائرات	السلاح (٢) صواريخ	السلاح (٣) مدفعية
1	٠	٤	٠
2	٢	٣	٢
3	٣	٣	١
4	١	٧	١
5	٠	٦	٠
6	١	٥	٣
7	٢	٥	٢
8	٢	٤	٣
9	٥	٦	٠
10	٣	٠	٤
11	٦	٥	٤
12	٤	٤	٦
13	٥	٠	٤
14	٠	٤	١
15	٦	٦	٥
16	٤	٠	١
17	٠	٦	١
18	١	٥	١
19	٢	٤	٢
20	٣	٣	٤
	٥٠	٨٠	٤٥

الاستنتاجات والتوصيات

يتبين لنا من خلال النتائج التي حصلنا عليها بأن عدد وأنواع الاسلحة الهجومية التي تخصص على كل هذه تعتمد بالدرجة الاساس على أحتمال أختراق السلاح(j) للدفاعات الموجودة حول الهدف(i) والممثل بـ (U_{ij}) وكذلك على أحتمال أنطلاق السلاح بنجاح(j) والممثل بـ(R_j) فالاهداف (١، ٥) لاتخصص عليها أسلحة من النوع الاول وكذلك من النوع الثالث، أما الاهداف (١٠، ١٣، ١٦) فلا تخصص عليها أسلحة من النوع الثاني والهدف (٩) لايخصص عليه سلاح من النوع الثالث وأخيراً الاهداف (١٤، ١٧) لاتخصص عليها أسلحة من النوع الاول.

من هذا يمكن القول بأن مشكلة تخصيص الاسلحة مهمة جداً في أختيار عدد وأنواع الاسلحة التي تهاجم الاهداف التي تحقق أكبر ضرر ممكن وأختيار العدد الأمثل من الاسلحة الهجومية التي تخصص لضرب عدد من الاهداف.

المصادر

[1] Bowen K. C., "Operational Research Contribution to the Problems of Defense, Third International Discussion Conference operational Research, Universities of Sussex Lancaster and Pennsylvani, May, 1980.

[2] Huber R. K., Sonsen F. and Reine E., "Military Strategy and Tactics, Computer Modeling of Land War Problem", New York, 1975.

[3] George L., "Analytic Approaches to Problem of Middle-Zised Defense Department", OMEGA, Vol.13, No.2, 1985, pp.107-113.

[4] F. Lemus and K. H. Devid, "An Optimum Allocation of Different Weapons to a Target Complex"; Operations Research, 11 (1976).

[5] Hamdy A. Taha, "Operation Research", New York, Mc-Millan, 1982.

[6] Anstreicher, K. N. Brixius, J. P. Goux and J. Linderoth, "Solving Large Quadratic Assignment Problem on Computational Grids", Mathematical Programming, to Appear, 2001.

[7] Performance Excellence in the Wood Products Industry, Operation Research, EM 8779, June, 2002.

[8] Recb, J. and Leavengood, “Using Duality and Sensitivity Analysis to Interpet Linear Programming Solution”, EM 8744, Corvallis: Oregon State University Extension Service, pp.24, 2000.

[9] Linear Programming Motivation, SS 149 Staff, September 11, 2007.

Abstract:

In this paper, we will study the method of model building which is a fundamental approach in the theory of operation research for solving non-linear real life problems. The solutions are obtained using Lagrange multipliers method, and the results are explained using real life problem.